PHYSIK

Geradlinige Bewegungen

Teil 2

Gleichmäßig beschleunigte Bewegungen

Freier Fall

Gleichmäßig gebremste Bewegungen

Datei Nr. 91112

Friedrich W. Buckel

Stand: 24. September 2021

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

1	Grundlagen	3
2	Einfache Berechnungen	7
3	Etwas schwierigere Beispiele	9
4	Der freie Fall	11
	Aufgabenblatt mit Lösungen	11
5	Bewegungen mit Anfangsgeschwindigkeit	17
6	Bremsbewegungen	21

Weitere Beispiele stehen in der Datei „Wurfbewegungen“, denn der senkrechte Wurf nach oben ist (zumindest im aufsteigenden Teil) auch eine Bremsbewegung.

1 Grundlagen

Ein Fahrzeug kann sich im Zustand der Ruhe oder der Bewegung befinden.
Die Bewegung kann gleichförmig sein, dann legt es in gleichen Zeitspannen Δt gleiche Strecken Δs zurück. Dadurch ergibt sich eine konstante Geschwindigkeit $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Soll der Bewegungszustand geändert werden, benötigt man dazu eine Kraft, die entweder die Geschwindigkeit vergrößert (also das Fahrzeug beschleunigt) oder verkleinert (also das Fahrzeug abbremst.)

Der Leser sollte zunächst über das Geschwindigkeitsproblem nachdenken.

Bei der gleichförmigen Geschwindigkeit (Text 91111) definiert man die Geschwindigkeit als Quotient $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Das geht, weil dieser Quotient, egal wie lange man misst, stets denselben Wert liefert, eben die konstante Geschwindigkeit.
Wendet man diese Methode, also Messen einer Strecke in einer bestimmten Zeitspanne, dann erhält man je nach Streckenlänge oder Zeitspanne einen anderen Wert, wenn das Fahrzeugt beschleunigt oder abgebremst wird. Man wird dann diese Quotienten als Durchschnitts-Geschwindigkeit bezeichnen. Man schreibt dann $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Physik bedeutet experimentieren.

Wenn man ein Fahrzeug durch eine konstant wirkende Kraft beschleunigt und dann eine Messreihe aufstellt, dann stellt man fest, dass die Geschwindigkeit gleichmäßig zunimmt.
Man untersucht daher, um wieviel $\frac{m}{s}$ die Geschwindigkeit pro s zunimmt.

Diese Geschwindigkeitsänderung nennt man die Beschleunigung: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Wenn beispielsweise v in 3 Sekunden um $\Delta v = 6\frac{m}{s}$ zunimmt, ist $a = \frac{6\frac{m}{s}}{3s} = 2\frac{m}{s^2}$:

Das heißt also, dass v pro Sekunde um $2\frac{m}{s}$ zunimmt.

Wenn man das experimentell überprüfen möchte, muss man also die Wegstrecke s mit t^2 vergleichen
Man misst von t = 0 b zw. s = 0 aus!) Daher ist $\Delta s = s$ und $\Delta t = t$

Beispiel einer Messreihe:

So oder ähnlich bestätigt man, dass $\frac{s}{t^2}$ konstant ist, d. h. also dass der zurückgelegte Weg s proportional zu t^2 ist.So kommt man auf $s = k \cdot t^2$

Man kann dann nachweisen dass gilt:

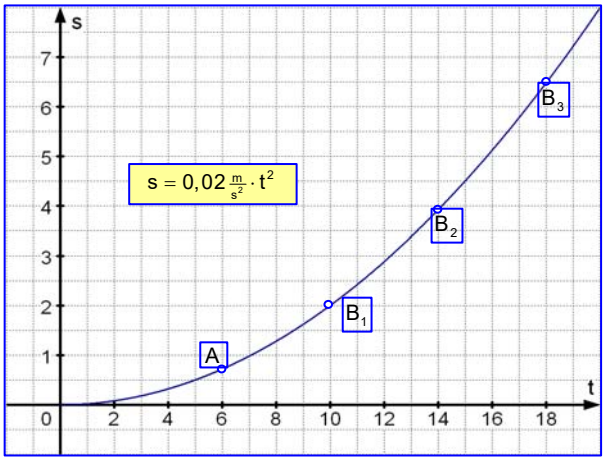
$$s = \frac{1}{2}at^2$$

s	t	t^2	$\frac{s}{t^2}$
0,08 m	2 s	4 s^2	0,02 $\frac{m}{s^2}$
0,18 m	3 s	9 s^2	0,02 $\frac{m}{s^2}$
0,32 m	4 s	16 s^2	0,02 $\frac{m}{s^2}$
0,50 m	5 s	25 s^2	0,02 $\frac{m}{s^2}$
0,72 m	6 s	35 s^2	0,02 $\frac{m}{s^2}$

Es gibt also für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung die Gesetze

$$s(t) = \tfrac{1}{2}at^2 \quad \text{und} \quad v(t) = a \cdot t$$

Nun sollte man gleich ein Schaubild zur Hand haben, denn die s-t-Formel stellt ja eine Parabel dar:



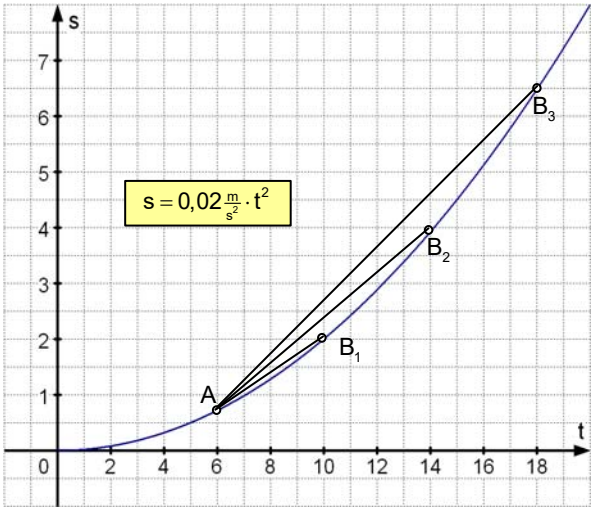
Auf der t-Achse wurde als Maßstab 1 cm $\hat{=}$ 2 s gewählt, damit die Parabel nicht zu flach wird.
In das Diagramm sind vier „Zustandspunkte“ eingetragen:

$A(6\,s|0{,}72\,m)$, $B(10\,s|2\,m)$, $C(14\,s|3{,}92\,m)$ und $D(18\,s|6{,}48\,m)$,

Wir benötigen sie gleich für unser nächstes Problem:

Wie kommt man nun zu einem vernünftigen Geschwindigkeitsbegriff ?

Mit der Formel $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ berechnet man geometrisch interpretiert, die Steigung der Strecken AB.



Man erhält drei Durchschnitts-Geschwindigkeiten.

$\overline{AB_3}$: $\quad v_3 = \frac{6{,}48\,m - 0{,}72\,m}{18\,s - 6\,s} = \frac{5{,}76\,m}{12\,s} = 0{,}48\,\frac{m}{s}$

$\overline{AB_2}$: $\quad v_2 = \frac{3{,}92\,m - 0{,}72\,m}{14\,s - 6\,s} = \frac{3{,}20\,m}{8\,s} = 0{,}40\,\frac{m}{s}$

$\overline{AB_1}$: $\quad v_1 = \frac{2{,}00\,m - 0{,}72\,m}{10\,s - 6\,s} = \frac{1{,}28\,m}{4\,s} = 0{,}32\,\frac{m}{s}$

Diese Durchschnittgeschwindigkeiten geben umso besser die Momentangeschwindigkeit des Fahrzeugs wieder, je näher die Messpunkte beisammen sind. Wer Erfahrung hat, der weiß, dass man die Zeitspanne gegen Null gehenlässt und damit von der Sekante zur Tangente kommt. Mathematisch gesehen entsteht dann die Ableitung der Wegfunktion.

Ich will als Beispiel einen sehr dicht bei A liegenden Punkt B* nehmen: $B(6{,}1\,s|0{,}7442\,m)$.

Dies ergibt einen Geschwindigkeitswert von $v^* = \frac{0{,}7442\,m - 0{,}72\,m}{6{,}1\,s - 6\,s} = \frac{0{,}0242\,m}{0{,}1\,s} = 0{,}242\,\frac{m}{s}$

Für $\Delta t \to 0$ nähert man sich der Momentangeschwindigkeit an.

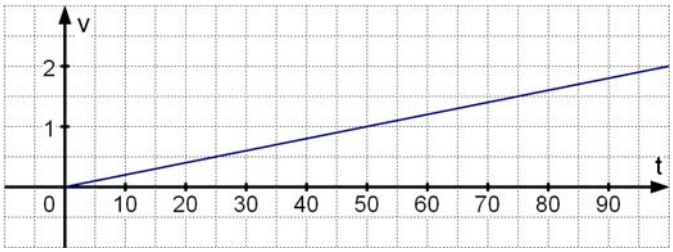
Wir müssen einfach die Wegfunktion ableiten und erhalten somit die Momentangeschwindigkeit:

$$s(t) = \tfrac{1}{2}at^2 \;\Rightarrow\; v(t) = s'(t) = at$$

Hinweis: Ist die abzuleitende Variable die Zeit, schreibt man nicht $s'(t)$ sondern $\dot{s}(t)$.
Der Punkt stellt somit das Zeichen für die Ableitung nach der Zeitvariablen dar.
Wem diese ganze Theorie zu schwer ist, der halte sich einfach am Ergebnis fest:
Die Momentangeschwindigkeit der gleichmäßig beschleunigten Bewegung wird berechnet durch

$$\boxed{v(t) = a \cdot t}$$

Dieses Schaubild gibt eine Gerade im v – t – Diagramm:



Man beachte, dass die Einheit auf der t-Achse noch kleiner gemacht worden ist. Denn bei der hier verwendeten kleinen Beschleunigung von $a = 0{,}04\,\frac{m}{s^2}$ nimmt die Geschwindigkeit nur ganz langsam zu.

Dieses Diagramm ist wichtig zum Verständnis des Begriffes Beschleunigung.

Im Vergleich mit der Geradengleichung y = mx erkennt man, dass a in v =at die Steigung darstellt. Und weil man diese Steigung an einer Geraden an beliebigen Abschnitten berechnen kann, gilt nicht nur $a = \frac{v}{t}$ (d. h. von t = 0 aus gemessen) sondern auch $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Beispiel:

Bei einer aus der Ruhe heraus geführten beschleunigten Bewegung hat ein Körper nach t_1 = 4 s die Geschwindigkeit $v_1 = 12\,\frac{m}{s}$ und nach t_2 = 10 s die Geschwindigkeit $v_2 = 30\,\frac{m}{s}$ erreicht..

Dann können wir aus der Startphase heraus rechnen: $a = \frac{v_1}{t_1} = \frac{12\,\frac{m}{s}}{4s} = 3\,\frac{m}{s^2}$

oder von t = 0 bis t_2 = 10 s: $a = \frac{v_2}{t_2} = \frac{30\,\frac{m}{s}}{10s} = 3\,\frac{m}{s^2}$

Oder für Zeitspanne von t_1 bis t_2 durch:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{30\,\frac{m}{s} - 12\,\frac{m}{s}}{10\,s - 4\,s} = \frac{18\,\frac{m}{s}}{6\,s} = 3\,\frac{m}{s^2}$$

Und man sollte die Bedeutung kennen:

$a = 3\,\frac{m}{s^2}$ bedeutet, dass die Geschwindigkeit pro Sekunde um $3\,\frac{m}{s}$ zunimmt.

Nun zur Bedeutung der Formel $\boxed{s = \frac{1}{2}at^2}$ **(Weg-Zeit-Gesetz)**

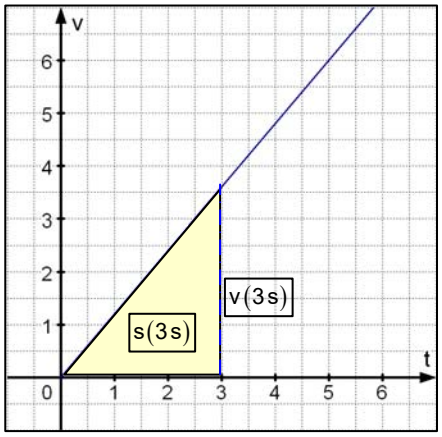
Beispiel.

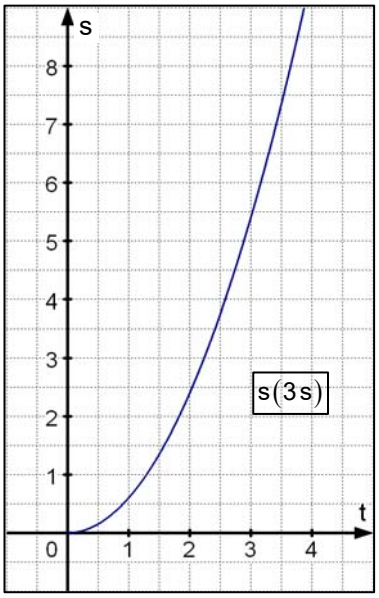
Gegeben sei eine Beschleunigung von $a = 1{,}2\,\frac{m}{s^2}$.

Dann lautet das Weg-Zeit-Gesetz: $s = \frac{1}{2}at^2 = 0{,}6\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$

und das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz: $v = a \cdot t = 1{,}2\,\frac{m}{s^2} \cdot t$

Dies ergibt zwei Diagramme:





Im rechten Bild ist die **Weg-Zeit-Funktion** $s(t) = 0{,}6\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$ als Parabel dargestellt. Zusätzlich ist der nach 3 s zurückgelegte Weg eingezeichnet: $s(3s) = 0{,}6\,\frac{m}{s^2} \cdot 9s^2 = 5{,}4\,m$.

Das linke Bild zeigt die **Geschwindigkeits-Zeit-Funktion** dargestellt: $v(t) = 1{,}2\,\frac{m}{s^2} \cdot t$.

Zusätzlich ist die Geschwindigkeit nach 3 s eingetragen: $v(3s) = 1{,}2\,\frac{m}{s^2} \cdot 3s = 3{,}6\,\frac{m}{s}$.

Die Dreiecksfläche hat den „Inhalt“ $A = \frac{1}{2} \cdot 3s \cdot 3{,}6\,\frac{m}{s} = 5{,}4\,m$.

Dies ist genau der nach 3 Sekunden zurückgelegte Weg, denn die Formel $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot at \cdot t = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t$ entspricht genau der Formel für den Dreiecksinhalt.

Merke: Die Fläche unter der v-t-Kurve gibt den zurückgelegten Weg an.

2 Einfache Berechnungen

WISSEN: Für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus der Ruhe heraus gilt:

(1) a ist konstant

(2) $v = a \cdot t$

(3) $s = \frac{1}{2}at^2$

(4) $v = \sqrt{2as}$

Formel (4) erhält man, in dem man (2) nach t umstellt und in (3) einsetzt.

Beispiel 1: (Gegeben sind t und v)

Ein Körper wird **aus der Ruhe heraus** beschleunigt und erreicht nach 8 Sekunden die Geschwindigkeit $11{,}2\,\frac{m}{s}$. Welchen Weg hat er dabei zurückgelegt?

Lösung: Gegeben sind $t = 8\,s$ und $v = 11{,}2\,\frac{m}{s}$.

Also liefert und die Formel $a = \frac{v}{t}$ die wirkende Beschleunigung: $a = \frac{11{,}2\,\frac{m}{s}}{8\,s} = 1{,}4\,\frac{m}{s^2}$

und den zurückgelegten Weg s erhält man mit $s = \frac{1}{2}a \cdot t^2 = 0{,}7\,\frac{m}{s^2} \cdot 64\,s^2 = 44{,}8\,m$.

Beispiel 2: (Gegeben sind t und s)

Ein Körper wird **aus der Ruhe heraus** beschleunigt und hat nach 5 s die Strecke 50 m zurückgelegt. Welche Geschwindigkeit hat er dann erreicht?

Lösung: Gegeben sind jetzt $t = 5\,s$ und $s = 50\,m$.

Die Formel $s = \frac{1}{2}at^2$ liefert jetzt die Beschleunigung a: $a = \frac{2s}{t^2} = \frac{100\,m}{25\,s^2} = 4\,\frac{m}{s^2}$

Damit folgt dann $v = a \cdot t = 4\,\frac{m}{s^2} \cdot 5\,s = 20\,\frac{m}{s}$.

Beispiel 3: (Gegeben sind a und s)

Ein Körper wird **aus der Ruhe heraus** mit $a = 2{,}4\,\frac{m}{s^2}$ beschleunigt und legt dabei die Strecke 30 m zurück. Welche Geschwindigkeit hat er erreicht?

Lösung: Gegeben sind $a = 2{,}4\,\frac{m}{s^2}$ und $s = 30\,m$.

Aus $s = \frac{1}{2}a \cdot t^2$ folgt $t^2 = \frac{2s}{a} = \frac{60\,m}{2{,}4\,\frac{m}{s^2}} = 25\,s^2$. Daher ist $t = \sqrt{25\,s^2} = 5\,s$.

Nun folgt $v = a \cdot t = 2{,}4\,\frac{m}{s^2} \cdot 5\,s = 12\,\frac{m}{s}$

Oder mit (4): $v = \sqrt{2as}$ $v = \sqrt{2 \cdot 2{,}4\,\frac{m}{s^2} \cdot 30\,m} = \sqrt{144\,\frac{m^2}{s^2}} = 12\,\frac{m}{s}$

Beispiel 4: (Gegeben sind a und v)

Ein Körper wird **aus der Ruhe heraus** mit $a = 2{,}4\,\frac{m}{s^2}$ beschleunigt und erreicht dann die Geschwindigkeit $12\,\frac{m}{s}$ m. Welche Wegstrecke hat er zurückgelegt?

Lösung: Gegeben sind $a = 2{,}4\,\frac{m}{s^2}$ und $v = 12\,\frac{m}{s}$, gesucht ist s.

Dazu passt Formel (4): $v = \sqrt{2as} \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2as \quad \Rightarrow \quad s = \frac{v^2}{2a} = \frac{144\,\frac{m^2}{s^2}}{4{,}8\,\frac{m}{s^2}} = 30\text{ m}$

Bemerkung:

Es gibt Lehrer, die zunächst ohne diese Formel auskommen wollen, weil sie den Umgang mit den beiden anderen einüben lassen wollen. Dann geht man so vor:

Aus $v = a \cdot t$ folgt $t = \frac{v}{a} = \frac{12\,\frac{m}{s}}{2{,}4\,\frac{m}{s^2}} = 5\,s$

Damit folgt: $s = \frac{1}{2}a \cdot t^2 = 1{,}2\,\frac{m}{s^2} \cdot 25\,s^2 = 30\,m$.

Dies ist etwas umständlicher, geht aber auch. Allerdings haben wir einen wichtigen Nebeneffekt, wir haben zugleich die Fahrzeit 5 s ermittelt. Ist diese in der Aufgabe auch gefragt, sollte man diesen Weg einschlagen.

Beispiel 5: (Gegeben sind s und v)

Ein Körper wird **aus der Ruhe heraus** beschleunigt und erreicht die Geschwindigkeit $6\,\frac{m}{s}$ m nach 15 m. Wie lange wurde er beschleunigt?

Lösung: Gegeben sind $s = 15\text{ m}$ und $v = 6\,\frac{m}{s}$, gesucht ist t.

Formel (4) eignet sich, damit a zu berechnen: $v = \sqrt{2as} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{2s} = \frac{36\,\frac{m^2}{s^2}}{30\text{ m}} = 1{,}2\,\frac{m}{s^2}$

Aus $v = a \cdot t$ erhält man dann die Zeit: $t = \frac{v}{a} = \frac{6\,\frac{m}{s}}{1{,}2\,\frac{m}{s^2}} = 5\text{ s}$

3 Etwas schwierigere Beispiele

Beispiel 6

Ein Körper wird aus der Ruhe heraus 5 Sekunden lang mit $a = 0{,}8\,\frac{m}{s^2}$ beschleunigt.

Dann fährt er gleichförmig weiter. Wie weit ist er nach 2 Minuten gefahren und welche Endgeschwindigkeit besitzt er?

Lösung:

Da für eine gleichförmige Bewegung (konstante Geschwindigkeit) andere Gesetze gelten als für eine beschleunigte Bewegung (Geschwindigkeit ändert sich), muss man Startphase und Beschleunigungsphase getrennt behandelt.

Startphase: (Gleichmäßig beschleunigte Bewegung).

Gegeben sind $a = 0{,}8\,\frac{m}{s^2}$ und $t = 5\,s$.

Daraus folgt $v = a \cdot t = 0{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot 5\,s = 4\,\frac{m}{s}$

und $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 0{,}4\,\frac{m}{s^2} \cdot 25\,s^2 = 10\,m$

(Achtung: t ist die aus der Ruhe heraus gefahrene Zeit)

Gleichförmige Phase:

Die Geschwindigkeit $v = 4\,\frac{m}{s}$ am Ende der Startphase bleibt konstant bis zum Ende der gleichförmigen Bewegung.

Zurückgelegte Wegstrecke in der Restzeit $\Delta t = 2\,min - 5\,s = 115\,s$:

Aus $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ folgt $\Delta s = v \cdot \Delta t = 4\,\frac{m}{s} \cdot 115\,s = 460\,m$

(Achtung: Diese 115 s ist jetzt eine <u>Zeitspanne</u> zwischen zwei Zeitpunkten weshalb man statt t jetzt $a\Delta t$ verwenden sollte.)

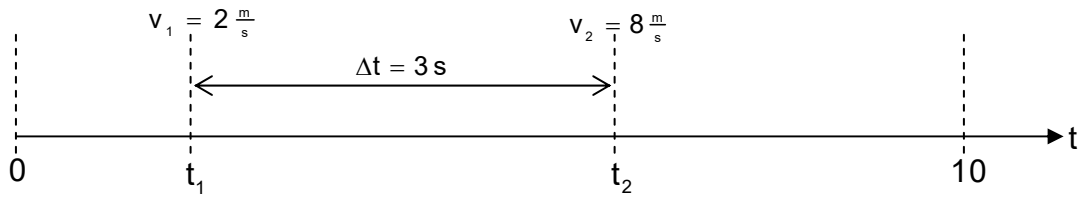
Beispiel 7

Ein Fahrzeug wird aus der Ruhe heraus gleichmäßig beschleunigt.

Dabei braucht es zur Erhöhung seiner Geschwindigkeit von $v_1 = 2\,\frac{m}{s}$ auf $v_2 = 8\,\frac{m}{s}$ genau 3 Sekunden.

Berechne die wirkende Beschleunigung, die nach 10 Sekunden erreichte Geschwindigkeit sowie den bis dahin zurückgelegten Weg.

Hilfsskizze (lohnt sich immer):



Lösung:

Achtung: Jetzt beginnt die Beobachtung nicht bei t = 0 wie bei den Beispielen 1 bis 5, sondern sie beginnt zu Zeitpunkt t_1, den wir nicht kennen.

Man könnte daher so vorgehen:

Zur Zeit t_1 ist	$v_1 = 2\frac{m}{s}$	d.h. es gilt	$v_1 = a \cdot t_1$	(1)
Zur Zeit t_2 ist	$v_2 = 8\frac{m}{s}$	d.h. es gilt	$v_2 = a \cdot t_2$.	(2)
(1) – (2) bringt:			$v_1 - v_2 = a \cdot (t_1 - t_2)$	
also			$\boxed{\Delta v = a \cdot \Delta t}$	

Wer sich diese Formel jedoch gemerkt hat, kann gleich rechnen: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6\frac{m}{s}}{3s} = 2\frac{m}{s^2}$

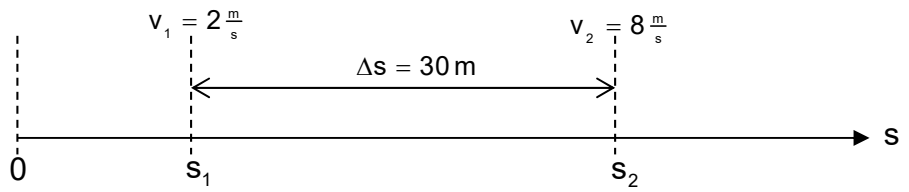
Nach t_3 = 10 s ist dann $v(10s) = 2\frac{m}{s^2} \cdot 10s = 20\frac{m}{s}$

und $s(10s) = \frac{1}{2} a \cdot t_3^2 = 1\frac{m}{s^2} \cdot 100s^2 = 100m$.

Beispiel 8

Ein Fahrzeug wird aus der Ruhe heraus gleichmäßig beschleunigt.
Dabei braucht es zur Erhöhung seiner Geschwindigkeit von $v_1 = 2\frac{m}{s}$ auf $v_2 = 8\frac{m}{s}$ genau 30 m Fahrstrecke. Berechne die wirkende Beschleunigung

Skizze



Der Unterschied zu Beispiel 7 ist erkennbar: Jetzt ist die Wegstrecke gegeben, zuvor war es die Fahrzeit. Daher nützt jetzt die Formel $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ nichts mehr.

Aber wir verwenden die Formel $v = \sqrt{2as}$ bzw. $v^2 = 2as$:

Es gilt bei s_1 : $v_1^2 = 2as_1$ und bei s_2 : $v_2^2 = 2as_2$

Nun subtrahiert man beide Gleichungen: $v_2^2 - v_1^2 = 2as_2 - 2as_1 = 2a(s_2 - s_1) = 2a \cdot \Delta s$

Daraus folgt $a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot \Delta s} = \frac{64\frac{m^2}{s^2} - 4\frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 30\,m} = \frac{60\frac{m^2}{s^2}}{60\,m} = 1\frac{m}{s^2}$

4 Der freie Fall

Wenn wir uns in nicht allzu große Höhe begeben, können wir die Gravitationskraft, also die Gewichtskraft unserer Körper als konstant ansehen. Denken wir uns dann noch den Luftwiderstand weg, dann fallen Körper unter dem Einfluss einer konstanten Kraft gleichmäßig beschleunigt.

Die Beschleunigung kann man experimentell zu etwa $9{,}81\frac{m}{s^2}$ bestimmen. Man bezeichnet sie als g.

Oftmals rechnet man zu Übungszwecken mit dem gerundeten Wert $g \approx 10\frac{m}{s^2}$.

Für das Fallen aus der Ruhe heraus gelten daher folgende Gesetze:

$$v = g \cdot t \qquad (1)$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

$$v = \sqrt{2as} \qquad (3)$$

Dabei ist h die Fallstrecke aus der Ruhe heraus und t die zugehörige Fallzeit sowie v die dann erreichte Geschwindigkeit.

Im Grunde ist also der freie Fall nichts Neues, sondern nur eine spezielle gleichmäßig beschleunigte Bewegung, die sogar den Vorteil hat, dass man die Beschleunigung kennt.

Aufgaben zum freien Fall

In den folgenden Lösungen wird mit $g = 10\frac{m}{s^2}$ gerechnet.

(1) Ein Körper fällt 12 Sekunden lang. Wie tief fällt er und welche Geschwindigkeit erreicht er?

(2) Ein Körper fällt 20 m tief. Wie lange braucht er dazu und welche Geschwindigkeit hat er am Ende der Fallstrecke?

(3) Ein Körper fällt frei. Nach welcher Zeit und welcher zurückgelegten Fallhöhe erreicht er die Geschwindigkeit $108\ \frac{km}{h}$?

(4) Ein Körper fällt 6 Sekunden lang frei. Wie lang sind die Wegstrecken in der 1. Sekunde, in der 2. Sekunde usw.? Gib auch die nach 1 s, 2 s usw. erreichten Geschwindigkeiten an.

(5) Zwei Körper werden von einem Hochhaus aus fallen gelassen. Der zweite Körper beginnt seinen Fall genau 1 Sekunde nach dem ersten. In welchem zeitlichen Abstand treffen sie auf dem Boden in 125 m Tiefe auf? Wie groß ist 3 Sekunden nach dem Loslassen des 1. Körpers der Höhenunterschied und der Geschwindigkeitsunterschied der beiden Körper?

(6) Ein Körper passiert bei Fallen die Marken h_1 und h_2 in der Zeit 2,4 s.
Diese Marken haben einen Abstand von 90 m. Berechne h_1 und h_2.

(7) Ein Körper passiert bei Fallen die Marken h_1 und h_2, die 1,8 m auseinander liegen.
Der Geschwindigkeitsunterschied beträgt $2\frac{m}{s}$ Berechne h_1 und h_2.

(8) Ein Körper erzielt auf einer Fallstrecke eine Geschwindigkeitszunahme von $5\frac{m}{s}$.
Was lässt sich daraus für die benötigte Zeitspanne folgern?

Lösungen

(1) Ein Körper fällt 12 Sekunden lang. Wie tief fällt er und welche Geschwindigkeit erreicht er?

Gegeben ist also $t = 12\,s$.

Fallstrecke: $h = \frac{1}{2}gt^2 = 5\frac{m}{s^2} \cdot 144\,s^2 = 720\,m$

Endgeschwindigkeit: $v = g \cdot t = 10\frac{m}{s^2} \cdot 12\,s = 120\frac{m}{s}$

Wie schnell dies ist, erkennt man vielleicht erst nach der Umrechnung in die Einheit $\frac{km}{h}$*:*

Es ist $1\frac{m}{s} = 3{,}6\frac{km}{h}$ also folgt $v = 120\frac{m}{s} = 120 \cdot 3{,}6\,\frac{km}{h} = 432\frac{km}{h}$.

Diese Aufgabe ist nicht mehr realistisch. Bei einer so hohen Geschwindigkeit ist der Luftwiderstand so groß, dass der Fall schon nahezu auf Gleichförmigkeit abgebremst wird!

(2) Ein Körper fällt 20 m tief. Wie lange braucht er dazu und welche Geschwindigkeit hat er am Ende der Fallstrecke?

Gegeben ist $h = 20\,m$.

Fallzeit: Aus $h = \frac{1}{2}g \cdot t^2$ folgt $t^2 = \frac{2h}{g} = \frac{40\,m}{10\frac{m}{s^2}} = 4\,s^2 \Rightarrow t = 2\,s$.

Endgeschwindigkeit: $v = g \cdot t = 10\frac{m}{s^2} \cdot 2\,s = 20\frac{m}{s}$

(3) Ein Körper fällt frei. Nach welcher Zeit und welcher zurückgelegten Fallhöhe erreicht er die Geschwindigkeit $108\,\frac{km}{h}$?

Gegeben ist $v = 108\frac{km}{h} = \frac{108}{3{,}6}\frac{m}{s} = 30\frac{m}{s}$

Fallzeit: Aus $v = g \cdot t$ folgt $t = \frac{v}{g} = \frac{30\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}} = 3\,s$.

Fallhöhe: $h = \frac{1}{2}g \cdot t^2 = 5\frac{m}{s^2} \cdot 9s^2 = 45\,m$.

Hinweis: *Wenn v gegeben ist und nur die Fallstrecke gefragt ist, kann man durch Verwendung der Formel* $v = \sqrt{2gh}$ *bzw.* $h = \frac{v^2}{2g}$ *sofort auf* $h = \frac{900\frac{m^2}{s^2}}{20\frac{m}{s^2}} = 45\,m$ *kommen.*

(4) Ein Körper fällt 6 Sekunden lang frei. Wie lang sind die Wegstrecken in der 1. Sekunde, in der 2. Sekunde usw.? Gib auch die nach 1 s, 2 s usw. erreichten Geschwindigkeiten an.

Berechnung der Folge der Wegstrecken mit einer Tabelle mittels $s = \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 5 \frac{m}{s^2} \cdot t^2$

und der Geschwindigkeiten mittels $v = g \cdot t = 10 \frac{m}{s^2} \cdot t$

Man erkennt, da22 die in einer Sekunde zurückgelegte Fallstrecke pro Sekunde um 10 m wächst.
Dagegen nimm die Geschwindigkeit pro Sekunde stets um denselben Betrag zu, um 10 $\frac{m}{s}$.

t	s	Δs	v	Δv
0	0	-	0	-
1 s	5 m	5 m	10 $\frac{m}{s}$	10 $\frac{m}{s}$
2 s	20 m	15 m	20 $\frac{m}{s}$	10 $\frac{m}{s}$
3 s	45 m	25 m	30 $\frac{m}{s}$	10 $\frac{m}{s}$
4 s	80 m	35 m	40 $\frac{m}{s}$	10 $\frac{m}{s}$
5 s	125 m	45 m	50 $\frac{m}{s}$	10 $\frac{m}{s}$
6 s	180 m	55 m	60 $\frac{m}{s}$	10 $\frac{m}{s}$

(5) Zwei Körper werden von einem Hochhaus aus fallen gelassen. Der zweite Körper beginnt seinen Fall genau 1 Sekunde nach dem ersten. In welchem zeitlichen Abstand treffen sie auf dem Boden in 125 m Tiefe auf? Wie groß ist 3 Sekunden nach dem Loslassen des 1. Körpers der Höhenunterschied und der Geschwindigkeitsunterschied der beiden Körper?

Fallzeit für die Tiefe 125 m:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{250\,m}{10 \frac{m}{s^2}}} = \sqrt{25\,s^2} = 5\,s$$

Jeder der beiden Körper fällt 5 Sekunden lang, dann schlägt er auf. Ja, und wenn der zweite 1 Sekunde nach dem ersten zu fallen beginnt, dann trifft er auch 1 Sekunde nach diesem unten auf !!!

Wie ist dies nun 3 Sekunden nach dem Fallbeginn des ersten Körpers ?
Dann ist der 2. genau 2 Sekunden unterwegs. Wir berechnen die Fallstrecken und ihre Differenz:

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{1}{2} g t_1^2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = \frac{1}{2} g \cdot \left(t_1^2 - t_2^2\right) = 5 \frac{m}{s^2} \cdot \left(9\,s^2 - 4\,s^2\right) = 25\,m$$

Und dann der Geschwindigkeitsunterschied:

$$\Delta v = v_1 - v_2 = g \cdot t_1 - g \cdot t_2 = g \cdot \left(t_1 - t_2\right) = g \cdot \Delta t = 10 \frac{m}{s^2} \cdot 1\,s = 10 \frac{m}{s}$$

Da haben wir sie wieder, diese Formel $g = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ also $\Delta v = g \cdot \Delta t$, mit der vieles einfach schneller geht.

(6) Ein Körper passiert bei Fallen die Marken h_1 und h_2 in der Zeit 2,4 s. Diese haben einen Abstand von 90 m. Berechne h_1 und h_2.

Da es hier um die Größen h und t geht, verwendet man die Gleichung $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$.

Wir müssen mit zwei Gleichungen arbeiten:

Für h_1 gilt: $h_1 = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2$ (1)

Für h_2 gilt: $h_2 = \frac{1}{2} g \cdot t_2^2$ (2)

Da wir den Höhenunterschied $\Delta h = h_2 - h_1 = 90\,\text{m}$ gegeben haben, müssen wir diese Gleichungen subtrahieren: Aus (2) – (1) folgt:

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} g \cdot t_2^2 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2$$

d.h. $\Delta h = \frac{1}{2} g \cdot \left(t_2^2 - t_1^2\right)$ (3)

Nun kennen wir auch noch $\Delta t = t_2 - t_1 = 2{,}4\,\text{s}$, also folgt $t_2 = t_1 + 2{,}4\,\text{s}$

Und daraus berechnet man $t_2^2 = \left(t_1 + 2{,}4\,\text{s}\right)^2 = t_1^2 + 4{,}8\,\text{s} \cdot t_1 + 5{,}76\,\text{s}^2$.

Aus (3) erhält man durch Einsetzen:

$$90\,\text{m} = 5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(t_1^2 + 4{,}8\,\text{s} \cdot t_1 + 5{,}76\,\text{s}^2 - t_1^2\right) \quad \Big| : 5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

d.h.

$$18\,\text{s}^2 = 4{,}8\,\text{s} \cdot t_1 + 5{,}76\,\text{s}^2$$

$$4{,}8\,\text{s} \cdot t_1 = 18\,\text{s}^2 - 5{,}76\,\text{s}^2$$

$$4{,}8\,\text{s} \cdot t_1 = 12{,}24\,\text{s}^2$$

$$t_1 = \frac{12{,}24}{4{,}8}\,\text{s} = 2{,}55\,\text{s}$$

Und damit $t_2 = t_1 + 2{,}4\,\text{s} = 4{,}95\,\text{s}$.

Nun lassen sich die gesuchten Höhenmarken berechnen:

$$h_1 = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 = 5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(2{,}55\,\text{s}\right)^2 = 32{,}5125\,\text{m}$$

$$h_2 = \frac{1}{2} g \cdot t_2^2 = 5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(4{,}95\,\text{s}\right)^2 = 122{,}5125\,\text{m}$$

Wie man schnell nachrechnen kann, beträgt der Höhenunterschied tatsächlich 90 m.

Dies war eine schwere Aufgabe. Es lohnt sich, die Methode genau zu studieren und sich einzuprägen.

(7) Ein Körper passiert bei Fallen die Marken h_1 und h_2, die 1,8 m auseinander liegen. Der Geschwindigkeitsunterschied beträgt $2\frac{m}{s}$. Berechne h_1 und h_2.

Da es um die Größen v und h geht, verwenden wir die Gleichung $v = \sqrt{2gh} \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g}$

Für h_1 gilt: $h_1 = \frac{v_1^2}{2g}$ (1)

Für h_2 gilt: $h_2 = \frac{v_2^2}{2g}$ (2)

Für den Höhenunterschied $\Delta h = h_2 - h_1 = 1{,}8\,m$ muss man diese Gleichungen subtrahieren:

Aus (2) – (1) folgt: $h_2 - h_1 = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}$

d.h. $\Delta h = \frac{1}{2g} \cdot \left(v_2^2 - v_1^2\right)$ (3)

Nun wissen wir noch, dass $\Delta v = v_2 - v_1 = 2\frac{m}{s}$ ist, also ist $v_2 = v_1 + 2\frac{m}{s}$.

Daraus berechnet man $v_2^2 = \left(v_1 + 2\frac{m}{s}\right)^2 = v_1^2 + 4\frac{m}{s} \cdot v_1 + 4\frac{m^2}{s^2}$.

Aus (3) erhält man durch Einsetzen:

$$1{,}8\,m = \frac{1}{20\frac{m}{s^2}} \cdot \left(v_1^2 + 4\frac{m}{s} \cdot v_1 + 4\frac{m^2}{s^2} - v_1^2\right) \quad \Big| \cdot 20\frac{m}{s^2}$$

$$36\frac{m^2}{s^2} = 4\frac{m}{s} \cdot v_1 + 4\frac{m^2}{s^2}$$

Daraus folgt $4\frac{m}{s} \cdot v_1 = 32\frac{m^2}{s^2}$

also $v_1 = 8\frac{m}{s}$

Weiter folgt: $v_2 = v_1 + 2\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s}$.

Gesucht sind $h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{64\frac{m^2}{s^2}}{20\frac{m}{s^2}} = 3{,}2\,m$

und $h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{100\frac{m^2}{s^2}}{20\frac{m}{s^2}} = 5\,m$.

Zur Kontrolle: Der Höhenunterschied ist 1,8m

.

(8) Ein Körper erzielt auf einer Fallstrecke eine Geschwindigkeitszunahme von $5\,\frac{m}{s}$.

Was lässt sich daraus für die benötigte Zeitspanne folgern?

Es geht um v und t , also verwenden wir die Gleichung $v = g \cdot t$.

Hier gilt aber auch $\Delta v = g \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta v}{g} = \frac{5\,\frac{m}{s}}{10\,\frac{m}{s^2}} = 0{,}5\ s$

5 Bewegungen mit Anfangsgeschwindigkeit

Beschleunigt ein Körper zum Zeitpunkt t = 0, in dem er bereits eine Anfangsgeschwindigkeit v_o besitzt, dann führt er quasi eine überlagerte Bewegung durch, nämlich einerseits die aus seiner Anfangsgeschwindigkeit resultierende gleichförmige Bewegung und dazu die durch die Beschleunigung entstehende gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Es gelten daher diese ***Bewegungsgleichungen***:

Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung: $v(t) = v_O + a \cdot t$ (1)

Weg-Zeit-Gleichung: $s(t) = v_O \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ (2)

Man versteht diese Überlagerung schnell, wenn man sich vorstellt, dass der Köper zunächst auf einem Fahrzeug ruht, das jedoch gleichförmig mit $v_O = 5\frac{m}{s}$ fährt. Dann aber wird der zunächst auf dem Fahrzeug ruhende Körper gleichmäßig beschleunigt mit $a = 2{,}4\frac{m}{s^2}$.

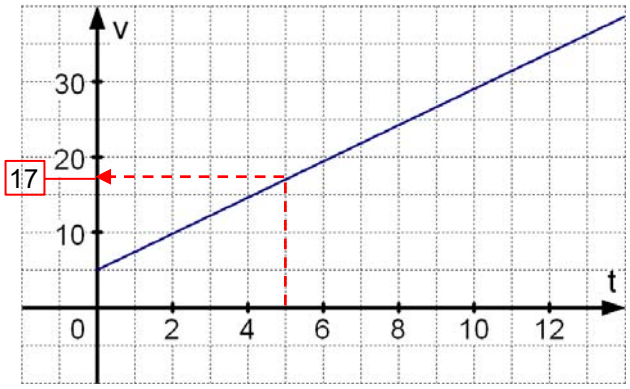
Dann addieren sich die Geschwindigkeit von Fahrzeug und Körper, siehe Gleichung (1), Und dasselbe gilt für Wegstrecken, die von Fahrzeug $(v_o \cdot t)$ und Körper $\left(\frac{1}{2}at^2\right)$ zurückgelegt werden, siehe Gleichung (2).

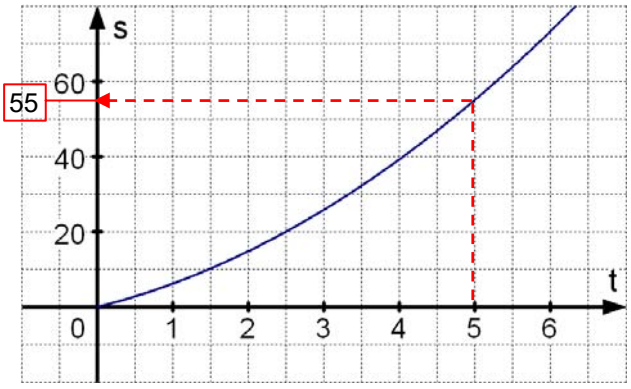
Die Bewegungsgleichungen lauten dann mit Zahlen:

$$v(t) = 5\frac{m}{s} + 2{,}4\frac{m}{s^2} \cdot t \qquad \text{und} \qquad s(t) = 5\frac{m}{s} \cdot t + 1{,}2\frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

Die graphische Darstellung ergibt

im v-t-Diagramm eine Gerade und im s-t-Diagramm einen Parabelbogen.





Die Werte für t = 5s sind eingezeichnet und werden so berechnet:

$$v(5s) = 5\frac{m}{s} + 2{,}4\frac{m}{s^2} \cdot 5s = 17\frac{m}{s} \qquad s(5s) = 5\frac{m}{s} \cdot 5s + 1{,}2\frac{m}{s^2} \cdot 25s^2 = 55m$$

Es folgen Rechenbeispiele…

Rechenbeispiele

(1) Ein Körper wird aus der Geschwindigkeit $3\frac{m}{s}$ heraus mit $0{,}2\frac{m}{s^2}$ gleichmäßig beschleunigt.

Wie lange fährt er, bis er 67,5 m zurückgelegt hat? Welche Endgeschwindigkeit hat er dann?

Lösung: Gegeben sind $v_O = 3\frac{m}{s}$, $a = 0{,}2\frac{m}{s^2}$ und $s = 67{,}5\,m$.

Die Gleichung $s(t) = v_O \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2$ enthält nur die Unbekannte t.

Mit Zahlen:

$$67{,}5\,m = 3\frac{m}{s} \cdot t + 0{,}1\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \quad \Big| : \frac{m}{s^2}$$

$$67{,}5\,s^2 = 3\,s \cdot t + 0{,}1 \cdot t^2 \quad \Big| \cdot 10$$

$$t^2 + 30\,s \cdot t - 675\,s^2 = 0$$

Die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat die Lösung $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Hier ist a = 1, b = 30 s und c = - 675 s^2. Also folgt:

$$t_{1,2} = \frac{-30\,s \pm \sqrt{900\,s^2 - 4 \cdot (-675\,s^2)}}{2} = \frac{-30\,s \pm \sqrt{3600\,s^2}}{2} = \frac{-30\,s \pm 60\,s}{2} = \begin{cases} 15\,s \\ (-45\,s) \end{cases}$$

Da eine negative Zeit hier bedeutungslos ist, kennen wir jetzt die Fahrzeit mit 15 s.

Das ergibt die Endgeschwindigkeit

$$v(15\,s) = v_0 + a \cdot 15\,s = 3\frac{m}{s} + 0{,}2\frac{m}{s^2} \cdot 15\,s = 6\frac{m}{s}$$

(2) Ein Körper wird 10 s lang gleichmäßig beschleunigt und erreicht nach 105 m v = 18,5 $\frac{m}{s}$.

Welche Anfangsgeschwindigkeit hatte er, und welche Beschleunigung hat gewirkt?

Lösung: Gegeben sind $s(10) = 105\,m$ und $v(10\,s) = 18{,}5\frac{m}{s}$.

Die Bewegungsgleichungen sind:

$$s(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2 \qquad (1)$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t \qquad (2)$$

Eingesetzt:

$$105\,m = v_0 \cdot 10\,s + \frac{1}{2}a \cdot 100\,s^2 \qquad (1)$$

$$18{,}5\frac{m}{s} = v_0 + a \cdot 10\,s \qquad (2)$$

Wir haben jetzt ein System aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten v_0 und a.

Eine Lösungsmöglichkeit ist die Elimination von v_0.

Dazu multipliziert man (2) mit 10s und subtrahiert dann:

$$105\,m = v_0 \cdot 10\,s + \frac{1}{2}a \cdot 100\,s^2 \qquad (1)$$

$$185\,m = v_0 \cdot 10\,s + a \cdot 100\,s^2 \qquad (3)$$

(3) – (1): $80\,m = \frac{1}{2}a \cdot 100\,s^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{80\,m}{50\,s^2} = 1{,}6\frac{m}{s^2}$

Aus Gleichung (2) folgt dann: $18{,}5\frac{m}{s} = v_0 + 1{,}6\frac{m}{s^2} \cdot 10\,s$ d.h. $v_0 = 18{,}5\frac{m}{s} - 16\frac{m}{s} = 2{,}5\frac{m}{s}$

(3) Ein Körper wird mit $a = 0{,}8\,\frac{m}{s^2}$ gleichmäßig beschleunigt und erreicht nach 40 m die $v = 10\,\frac{m}{s}$. Welche Anfangsgeschwindigkeit besaß er und wie lange wurde beschleunigt?

Lösung: Gegeben sind $a = 0{,}8\,\frac{m}{s^2}$, $v(t) = 10\,\frac{m}{s}$ und $s(t) = 40\,m$.

Die Bewegungsgleichungen sind:

$$s(t) = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad (1)$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t \qquad (2)$$

Eingesetzt:

$$\boxed{\begin{aligned} 40\,m &= v_0 \cdot t + 0{,}4\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (1) \\ 10\,\tfrac{m}{s} &= v_0 + 0{,}8\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t \qquad (2) \end{aligned}}$$

Wir haben jetzt ein System aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten v_0 und t.
Eine Lösungsmöglichkeit ist die Elimination von v_0.
Dazu multipliziert man (2) mit t und subtrahiert:

$$40\,m = v_0 \cdot t + 0{,}4\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (1)$$

$$10\,\tfrac{m}{s} \cdot t = v_0 \cdot t + 0{,}8\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (3)$$

(3) – (1):

$$10\,\tfrac{m}{s} \cdot t - 40\,m = 0{,}4\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für t und muss geordnet werden:

$$0{,}4\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 - 10\,\tfrac{m}{s} \cdot t + 40\,m = 0 \quad \Big| : 0{,}4\,\tfrac{m}{s^2}$$

$$t^2 - 25\,s \cdot t + 100\,s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{25\,s \pm \sqrt{625\,s^2 - 400\,s^2}}{2} = \frac{25\,s \pm \sqrt{225\,s^2}}{2} = \frac{25\,s \pm 15\,s}{2} = \begin{cases} 20\,s \\ 5\,s \end{cases}.$$

Kann dies möglich sein, dass es zwei verschiedene Fahrzeiten gibt ????
Wir setzen beide Zeiten in (2) ein und berechnen die Anfangsgeschwindigkeit:

Für t = 5 s: $10\,\frac{m}{s} = v_0 + 0{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot t \;\Rightarrow\; v_0 = 10\,\frac{m}{s} - 0{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot 5\,s = 10\,\frac{m}{s} - 4\,\frac{m}{s} = 6\,\frac{m}{s}$!!!

Für t = 20 s: $v_0 = 10\,\frac{m}{s} - 0{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot 20\,s = 10\,\frac{m}{s} - 16\,\frac{m}{s} = -6\,\frac{m}{s}$.

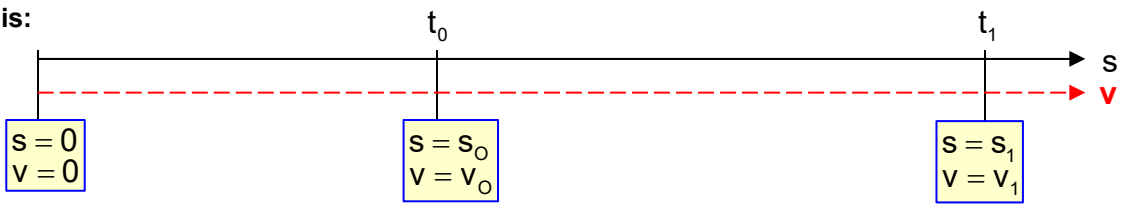
Man erkennt, dass im Falle 20 s der Körper in der „falschen“ Richtung startet.
Die Beschleunigung bremst ihn also zuerst bis auf 0 ab und beschleunigt ihn dann,
so dass er dann bei der *Wegmarke* 40 m auch die Geschwindigkeit $10\,\frac{m}{s}$ hat.

Ein realistisches Beispiel dafür ist die Mondlandung: Das Landemodul fällt auf die Mondoberfläche herunter. Dieser Fall wird immer stärker abgebremst, indem die Besatzung Düsentriebwerke zum Bremsen einsetzt. Diese sollen die Geschwindigkeit passend herabregeln, so dass sie auf der Mondoberfläche 0 geworden ist, dass also die erwünschte „weiche“ Landung stattfindet. Vergisst man nun das Abschalten dieser Triebwerke, wird die Rakete sofort wieder beschleunigt und zwar in der gleichen Richtung wie zuvor, also nach oben, worauf das Fahrzeug wieder abhebt.

(4) Ein Körper bewegt sich zur Zeit $t_0 = 0$ mit der Geschwindigkeit v_o und legt dann gleichmäßig beschleunigt die Strecke s zurück. Zeige, dass er dann eine Geschwindigkeit v erreicht, die man mit dieser Gleichung berechnen kann:

$$v^2 = v_O^2 + 2as$$

Beweis:



Diese Skizze soll den gesamten Bewegungsablauf darstellen.

Wenn das Fahrzeug zur Zeit t_0 die Geschwindigkeit v_o hat, dann denken wir uns das Fahrzeug zuvor gleichmäßig aus der Ruhe heraus beschleunigt.

Der Starpunkt sei am linken Ende.

Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus der Ruhe heraus gilt die Formel

$$v = \sqrt{2as}\ .$$

Also ist die zur Zeit t_O erreichte Geschwindigkeit: $v_O = \sqrt{2as_O}$

Wir lassen das Fahrzeug unverändert weiter beschleunigen und erhalten zum Zeitpunkt t_1 diese Geschwindigkeit: $v_1 = \sqrt{2as_1}$

Wir quadrieren beide Gleichungen: $v_O{}^2 = 2as_O$ (1)

$v_1{}^2 = 2as_1$ (2)

Dann subtrahieren wir (2) – (1): $v_1{}^2 - v_O{}^2 = 2as_1 - 2as_O = 2a(s_1 - s_O) = 2a \cdot \Delta s$

Für einen beliebigen Zeitpunkt t statt t_1 erhält man dann eine Geschwindigkeit v mit

$$v^2 - v_O{}^2 = 2a \cdot \Delta s\ .$$

Schreibt man für die ab t_O zurückgelegte Wegstrecke statt Δs einfach nur s,

dann erhält man die zu beweisende Gleichung: $v^2 = v_O{}^2 + 2as$.

6 Bremsbewegungen

Wenn auf ein Fahrzeug eine Kraft entgegen der Bewegungsrichtung wirkt, wird die Bewegung gebremst. Beispiel:

Die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_o = 8\frac{m}{s}$ und die Bremskraft bewirke eine Bremsverzögerung von $a = 2\frac{m}{s^2}$ (d. h. v wird pro Sekunde um $2\frac{m}{s}$ reduziert), dann berechnet man die aktuelle Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t seit Beginn des Bremsvorgangs durch

$$\boxed{v(t) = v_o - a \cdot t} \quad (1)$$

Und der zurückgelegte Weg ist:

$$\boxed{s(t) = v_o \cdot t - \tfrac{1}{2}at^2} \quad (2)$$

Mit Zahlen:

$$v(t) = 8\tfrac{m}{s} - 2\tfrac{m}{s^2} \cdot t \quad (1)$$

$$s(t) = 8\tfrac{m}{s} \cdot t - 1\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \quad (2)$$

Nach t = 3s gilt dann:

$$v(3s) = 8\tfrac{m}{s} - 2\tfrac{m}{s^2} \cdot 3s = 2\tfrac{m}{s}$$

$$s(3s) = 8\tfrac{m}{s} \cdot 3s - 1\tfrac{m}{s^2} \cdot 9s^2 = 24\text{ m} - 9\text{ m} = 15\text{ m}$$

Nach t = 5s:

$$v(5s) = 8\tfrac{m}{s} - 2\tfrac{m}{s^2} \cdot 5s = -2\tfrac{m}{s}$$

Eine negative Geschwindigkeit bedeutet Bewegung in die entgegengesetzte Richtung!

Das heißt, dass zwischen t = 3s und t =5 s die Bremsbewegung zum Stillstand gekommen ist.

Berechnung der Bremszeit bis zum Haltepunkt:

Bedingung: $v(t_H) = 0$ $\quad 8\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s^2} \cdot t_H = 0 \Rightarrow 2\frac{m}{s^2} \cdot t_H = 8\frac{m}{s}$ d. h. $t_H = \frac{8}{2}s = 4\text{ s}$

Berechnung des Bremswegs:

$$s(4s) = 8\tfrac{m}{s} \cdot t_H - 1\tfrac{m}{s^2} \cdot t_H^2 = 8\tfrac{m}{s} \cdot 4\text{ s} - 1\tfrac{m}{s^2} \cdot 16s^2 = 32\text{m} - 16\text{m} = 16\text{ m}$$

Herleitung einer Formel für den Bremsweg:

Aus der Haltebedingung $v(t_H) = 0$ folgt zunächst aus (1): $0 = v_o - a \cdot t_H \Rightarrow \boxed{t_H = \frac{v_0}{a}}$

Aus (2) erhält man dann den Bremsweg: $s(t_H) = v_o \cdot \boxed{\frac{v_o}{a}} - \frac{1}{2}a \cdot \boxed{\frac{v_o^2}{a^2}} = \frac{v_o^2}{a} - \frac{v_o^2}{2a} = \boxed{\frac{v_o^2}{2a}}$

$$s(t_H) = \frac{64\frac{m^2}{s_2}}{4\frac{m}{s^2}} = 16\text{ m}$$

Dies sollt bekannt vorkommen: Das Ergebnis folgt aus $v_o = \sqrt{2as}$ durch Umstellen

Wie kann das sein? Ganz einfach: Filmt man diese Bremsbewegung und lässt den Film rückwärts laufen, dann zeigt er eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus der Ruhe heraus.
Man kann also bei einer Bremsbewegung bis zum Halten den Bremsweg aus der umgekehrten Bewegung (gleichmäßig aus der Ruhe heraus beschleunigt) berechnen!

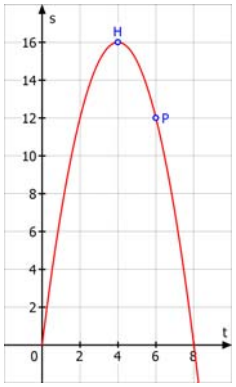
Kurze Übersicht:

Unser Körper bewegt sich mit $v_o = 8\frac{m}{s}$ und wird dann durch $a = 2\frac{m}{s^2}$ abgebremst und hält nach 4 s an. Dabei hat er einen Bremsweg von 16 m zurückgelegt.

Nun variieren wir diese Aufgabe, indem wir den Körper auf einer Rampe (schiefe Ebene) aufwärts gleiten lassen. Er bekommt durch einen Stoß die Geschwindigkeit $8\frac{m}{s}$, wird dann aber (weil es aufwärts geht) abgebremst. Dies kann z. B. mit genau den Daten geschehen, die oben stehen.

Nach genau 4s hält er an und gleitet dann wieder herab in Form einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Jetzt die Frage dazu:
Welche Strecke hat der gleitende Körper seit dem Aufwärtsstart nach 6s zurückgelegt?

Zunächst eine falsche Lösung:



Wir setzen in die Weg-Zeit-Gleichung (2) ein: $s(t) = 8\frac{m}{s}\cdot t - 1\frac{m}{s^2}\cdot t^2$

$$s(6s) = 8\frac{m}{s}\cdot 6s - 1\frac{m}{s^2}\cdot 36s^2 = 48m - 36m = 12\ m$$

Dass das Ergebnis nicht stimmt, erkennt man daran, dass er nach 4 s beim Haltepunkt H angekommen ist, und das waren schon 16 m.
Dann aber gleitet er wieder zurück und kommt nach insgesamt 4 s in P an.
Unser Ergebnis $s(6s) = 12m$ ist <u>keine Wegstrecke sondern eine Wegmarke</u>, eine Koordinate für die gradlinige Bewegung.

Die s-t-Gleichung stellt s als quadratische Funktion von t dar, was im Diagramm einen Parabelbogen ergibt. Man sieht dort, wie sich der Körper in s-Richtung bewegt und dann bei H (also s = 16 m) wieder umkehrt.

Wenn wir also die wirklich zurückgelegt Strecke suchen, müssen wir die Bewegung splitten und rechnen: 16 m bis H und dann 4 m zurück, also 20 m zusammen !

Leider hat diese Berechnung noch einen anderen Haken: Bei einer Aufwärtsbewegung wirkt eine Bremsverzögerung, die durch die sogenannte **Hangabtriebskraft** und die **Reibungskraft** erzeugt wird. Beim Zurückgleiten wird eine **Beschleunigungskraft**, die dem Betrag nach größer ist als zur soeben besprochene Bremsverzögerung, weil jetzt die Hangabtriebskraft zieht und nur die Reibungskraft bremst.

Um diese Aufgabe rechnen zu können muss man wissen, wie man Hangabtriebskraft und Reibungskraft berechnen und wie daraus die Beschleunigung und die Bremsverzögerung berechnet werden. Diese Aufgabe schiebe ich auf der nächsten Seite für Fortgeschrittene ein.

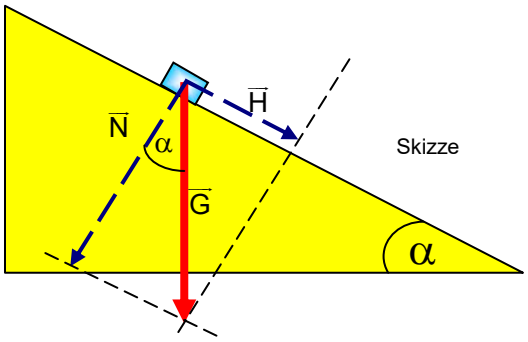
Einschub: **Bewegung auf der schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel 65°.**
unter Beachtung der wirkenden Kräfte.

Hangabtriebskraft: $\sin\alpha = \frac{H}{G} \Rightarrow H = G \cdot \sin\alpha$

Normalkraft: $\cos\alpha = \frac{N}{G} \Rightarrow N = G \cdot \cos\alpha$

Gleitreibungskraft: $R = f \cdot N = f \cdot G \cdot \cos\alpha$

Newtonsches Kraftgesetzt: $F = m \cdot a$



Wir rechnen mit $\alpha = 10^{o}$ und dem Gleitreibungskoeffizienten $f = 0{,}03$.

Für die **Bewegung aufwärts** erhält man die <u>Bremsverzögerung</u>:

$$a_1 = \frac{F_{Brems}}{m} = \frac{H+R}{m} = \frac{G \cdot \sin\alpha + f \cdot G \cdot \cos\alpha}{m} = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha + f \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha}{m} = g \cdot (\sin\alpha + f \cdot \cos\alpha)$$

Mit Zahlen: $a_1 = 10\,\frac{m}{s^2} \cdot \left(\sin 10^{o} + 0{,}03 \cdot \cos 10^{o}\right) \approx 2\,\frac{m}{s^2}$

Das ist etwa die Situation der Rechnung auf Seite 22.

Nach dem Anhalten wirkt **abwärts** diese Beschleunigung:

$$a_2 = \frac{F}{m} = \frac{H-R}{m} = \frac{G \cdot \sin\alpha - f \cdot G \cdot \cos\alpha}{m} = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha - f \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha}{m} = g \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha)$$

Mit Zahlen: $a_1 = 10\,\frac{m}{s^2} \cdot \left(\sin 10^{o} - 0{,}03 \cdot \cos 10^{o}\right) \approx 0{,}144\,\frac{m}{s^2}$

Man kann also sagen: Abwärts ist die Beschleunigung kleiner als aufwärts die Bremsverzögerung.

Musterbeispiele

(1) Ein Fahrzeug fährt mit $v_0 = 108\,\frac{km}{h}$ und wird dann gleichmäßig abgebremst.

Die Bremsverzögerung sei $7{,}5\,\frac{m}{s^2}$.

a) Berechne die Geschwindigkeit, die das Fahrzeug nach 2 s noch hat.
Wie weit ist es in diesen 2 Sekunden gefahren?

b) Berechne die Geschwindigkeit, die das Fahrzeug nach 5 s noch hat.
Wie weit ist es in diesen 5 Sekunden gefahren ? Deute das Ergebnis.

c) Berechne den Bremsweg und die Bremsdauer.

Lösung:

Gegeben sind $v_0 = 108\,\frac{km}{h} = \frac{108}{3{,}6}\,\frac{m}{s} = 30\,\frac{m}{s}$ und $a = 7{,}5\,\frac{m}{s^2}$.

Bewegungsgleichungen $s(t) = v_O \cdot t - \frac{1}{2}a \cdot t^2$ (1)

$v(t) = v_0 - a \cdot t$ (2)

Mit Zahlen: $s(t) = 30\,\frac{m}{s} \cdot t - 3{,}75\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$ (1)

$v(t) = 30\,\frac{m}{s} - 7{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot t$ (2)

a) Weg nach 2 s: $s(2s) = 30\,\frac{m}{s} \cdot 2s - 3{,}75\,\frac{m}{s^2} \cdot 4s^2 = 60m - 15m = 45m$

Geschwindigkeit nach 2 s: $v(2s) = 30\,\frac{m}{s} - 7{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot 2s = 30\,\frac{m}{s} - 15\,\frac{m}{s} = 15\,\frac{m}{s}$.

(Aus der Weg-Gleichung erkennt man: Ohne das Abbremsen hätte das Fahrzeug in diesen 2 s 60 m zurückgelegt, die Bremsverzögerung hat 15 m weggenommen.)

b) Weg nach 5 s: $s(5s) = 30\,\frac{m}{s} \cdot 5s - 3{,}75\,\frac{m}{s^2} \cdot 25s^2 = 150m - 93{,}75m = 56{,}25m$

Geschwindigkeit nach 5 s: $v(5s) = 30\,\frac{m}{s} - 7{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot 5s = 30\,\frac{m}{s} - 37{,}5\,\frac{m}{s} = -7{,}5\,\frac{m}{s}$.

An dieser negativen Geschwindigkeit erkennt man, dass die Fahrzeit 5 s bereits länger ist als die Bremsdauer. Würde die Bremsbeschleunigung nach dem Halten weiter wirken, würde sie das Fahrzeug in der entgegengesetzten Richtung beschleunigen und dann die Geschwindigkeit $7{,}5\,\frac{m}{s}$ erreichen. Also: Nach 5 s gibt es hier keine weitere Bewegung.

c) Bedingung für den Haltepunkt: $v(t_H) = 0$.

Dies wird in (2) eingesetzt: $0 = 30\,\frac{m}{s} - 7{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot t_H \;\Rightarrow\; 7{,}5\,\frac{m}{s} \cdot t_H = 30m \;\Rightarrow\; t_H = \frac{30m}{7{,}5\,\frac{m}{s}} = 4s$.

Bremsweg: $s(4s) = 30\,\frac{m}{s} \cdot 4s - 3{,}75\,\frac{m}{s^2} \cdot 16s^2 = 120m - 60m = 60m$.

Oder diese Lösung ohne Berechnung der Bremsdauer:

Man betrachtet die umgekehrte Bewegung zur Bremsbewegung, also den Start aus der Ruhe heraus: $v = \sqrt{2as} \;\Rightarrow\; s = \frac{v^2}{2a} = \frac{900\,\frac{m^2}{s^2}}{15\,\frac{m}{s^2}} = 60\text{ m}$

(2) Ein Fahrzeug macht eine Vollbremsung und hinterlässt eine Bremsspur von 48 m.

a) Wie groß war die Anfangsgeschwindigkeit, wenn man von einer durchschnittlichen Bremsverzögerung von $6\frac{m}{s^2}$ ausgehen kann?

b) Nach welcher Strecke und Zeit hatte das Fahrzeug nur noch die halbe Geschwindigkeit?

c) Nach welcher Zeit hatte es den halben Bremsweg zurückgelegt und wie groß war dort seine Geschwindigkeit?

Lösung:

a) Gegeben sind der Bremsweg $s = 48\,m$ und die Bremsverzögerung $a = 6\frac{m}{s^2}$.

Anstatt den Haltevorgang zu berechnen, betrachten wir die umgekehrte Bewegung, bei der das Fahrzeug aus der Ruhe heraus gleichmäßig beschleunigt wird. Dann erreicht es diese Geschwindigkeit $v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 6\frac{m}{s^2} \cdot 48\,m} = \sqrt{576}\,\frac{m}{s} = 24\frac{m}{s}$.

Für die Bremsbewegung war dies die Anfangsgeschwindigkeit.
Die Bewegungsgleichungen für die Bremsbewegung lauten:

$$s(t) = v_O \cdot t - \tfrac{1}{2}a \cdot t^2 \qquad (1)$$
$$v(t) = v_0 - a \cdot t \qquad (2)$$

Mit Zahlen:

$$s(t) = 24\frac{m}{s} \cdot t - 3\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (1)$$
$$v(t) = 24\frac{m}{s} - 6\frac{m}{s^2} \cdot t \qquad (2)$$

b) Für die <u>halbe Geschwindigkeit</u> $12\frac{m}{s}$ folgt aus (2):

$$12\frac{m}{s} = 24\frac{m}{s} - 6\frac{m}{s^2} \cdot t_1 \;\Rightarrow\; 6\frac{m}{s^2} \cdot t_1 = 12\frac{m}{s} \;\Rightarrow\; t_1 = 2\,s$$

Der zugehörige Fahrweg ist dann: $s(2\,s) = 24\frac{m}{s} \cdot 2\,s - 3\frac{m}{s^2} \cdot 4\,s^2 = 36\,m$

Der <u>halbe Bremsweg</u> bedeutet ist $s(t) = 24\,m$. Damit folgt aus (1):

$$24\,m = 24\frac{m}{s} \cdot t - 3\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \quad \Big|\, :3\frac{m}{s^2}$$

$$8\,s^2 = 8s \cdot t - t^2$$

$$t^2 - 8\,s \cdot t + 8\,s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{8\,s \pm \sqrt{64\,s^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8s^2}}{2} = \frac{8\,s \pm \sqrt{32\,s^2}}{2} = \frac{8 \pm 5{,}66}{2}\,s = \begin{cases} 6{,}83\,s \\ 1{,}83\,s \end{cases}$$

Hier muss man stets die kleinere Zeit verwenden. Die größere Zeit gehört zu dem Gedankenexperiment, bei dem der Körper nach dem Halten in entgegengesetzte Richtung beschleunigt wird. Nach 6,83 s käme er von der anderen Richtung her zur Marke 24 m.

(3) Ein Fahrzeug wird gleichmäßig abgebremst, legt dabei in 5 Sekunden 60 m zurück und erreicht die Geschwindigkeit $6\,\frac{m}{s}$.

Berechne die vor dem Abbremsen vorhandene Geschwindigkeit v_0 sowie die Bremsverzögerung. Wie groß ist der Bremsweg bis zum Halten?

Lösung:

Gegeben sind $s(5s) = 60m$ und $v(5s) = 6\,\frac{m}{s}$.

Die Bewegungsgleichungen für die Bremsbewegung lauten:

$$s(t) = v_O \cdot t - \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad (1)$$

$$v(t) = v_O - a \cdot t \qquad (2)$$

Mit Zahlen:

$$60m = v_O \cdot 5s - \tfrac{1}{2} a \cdot 25s^2 \qquad (3)$$

$$6\,\tfrac{m}{s} = v_O - a \cdot 5s \qquad (4)$$

Wir multiplizieren die Gleichung (3) mit 2 und die Gleichung (4) mit 10 s .

$$120m = v_O \cdot 10s - a \cdot 25s^2 \qquad (5)$$

$$60m = v_O \cdot 10s - a \cdot 50s^2 \qquad (6)$$

(5) – (6)

$$60m = a \cdot 25s^2$$

Dies ergibt:

$$a = \frac{60m}{25s^2} = \boxed{2{,}4\,\frac{m}{s^2}}$$

Damit folgt aus (4):

$$v_0 = 6\,\tfrac{m}{s} + a \cdot 5s = 6\,\tfrac{m}{s} + 2{,}4\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 5s = 18\,\tfrac{m}{s}.$$

Es fehlt noch der Bremsweg. Für die umgekehrte Bewegung gilt:

$$v = \sqrt{2as} \;\Rightarrow\; s = \frac{v^2}{2a} = \frac{\left(18\,\frac{m}{s}\right)^2}{4{,}8\,\frac{m}{s^2}} = \boxed{67{,}5m}$$

(4) Ein Fahrzeug wird gleichmäßig abgebremst und reduziert dabei auf einer Strecke von 48 m seine Geschwindigkeit auf ein Fünftel.

Die Bremsverzögerung wird mit $a = 4\,\frac{m}{s^2}$ angegeben.

Berechne die Anfangsgeschwindigkeit und den ganzen Bremsweg bis zum Halten..

Lösung:

Gegeben sind: $s(t) = 48\,m$, $v(t) = \frac{1}{5}v_0$ und $a = 4\,\frac{m}{s^2}$

Bewegungsgleichungen für die Bremsbewegung:

$$s(t) = v_O \cdot t - \frac{1}{2}a \cdot t^2 \qquad (1)$$

$$v(t) = v_0 - a \cdot t \qquad (2)$$

Mit Zahlen:

$$48\,m = v_O \cdot t - 2\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (3)$$

$$\frac{1}{5}v_0 = v_0 - 4\,\frac{m}{s^2} \cdot t \qquad (4)$$

Hier liegen 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten vor. Dieses System kann man durch das Subtraktionsverfahren lösen oder aber – was sich hier besonders anbietet – mit dem Einsetzungsverfahren. Dazu stellen wir die Gleichung (4) nach v_0 um:

$$\frac{1}{5}v_0 = v_0 - 4\,\frac{m}{s^2} \cdot t \;\Rightarrow\; \frac{4}{5}v_0 = 4\,\frac{m}{s^2} \cdot t$$

$$v_0 = 5\,\frac{m}{s^2} \cdot t \qquad (5)$$

In (3):

$$48\,m = 5\,\frac{m}{s^2} \cdot t \cdot t - 2\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

$$3\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2 = 48\,m$$

$$t^2 = 16\,s^2 \;\Rightarrow\; \boxed{t = 4\,s}$$

(Die zweite mathematische Lösung t = -4 s ist hier unbrauchbar.)

Eingesetzt in (5): $v_0 = 5\,\frac{m}{s^2} \cdot 4\,s = \boxed{20\,\frac{m}{s}}$.

Es fehlt nun noch der Bremsweg. Für die umgekehrte Bewegung gilt:

$$v = \sqrt{2as} \;\Rightarrow\; s = \frac{v^2}{2a} = \frac{\left(20\,\frac{m}{s}\right)^2}{8\,\frac{m}{s^2}} = \boxed{50\,m}$$

(5) Ein Fahrzeug startet zur Zeit t = 0, beschleunigt 4 Sekunden lang mit $a = 3\frac{m}{s^2}$, fährt dann 5 s lang gleichförmig und bremst dann so ab, dass das Fahrzeug nach weiteren 6 Sekunden zum Stehen kommt. Welchen Weg hat das Fahrzeug insgesamt zurückgelegt?

Lösung:

Diese Aufgabe besteht aus drei Teilbewegungen:

(1) **Gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus der Ruhe heraus.**

Bewegungsgleichungen: $s_1(t) = \frac{1}{2}a_1 \cdot t^2$ und $v_1(t) = a_1 \cdot t$

Nach t = 4 s: $s_1(4\,s) = 1{,}5\frac{m}{s^2} \cdot 16\frac{m^2}{s^2} = 24\,m$ und $v_1(4\,s) = 3\frac{m}{s^2} \cdot 4\,s = 12\frac{m}{s}$

(2) **Gleichförmige Bewegung.**

Um die Rechnung zu vereinfachen legen wir den Nullpunkt der Zeitachse für diese Rechnung an den Beginn der gleichförmigen Bewegung, dann gilt für die folgenden 5 s:

$$s_2(t) = v_1(5\,s) \cdot t \;\Rightarrow\; s_2(5\,s) = 12\frac{m}{s} \cdot 5\,s = 60\,m$$

$$v_2(5s) = 12\frac{m}{s} \qquad \text{(konstante Geschwindigkeit.)}$$

(3) **Bremsbewegung**

Nun legen wir t = 0 in den Beginn der Bremsbewegung.

Die Bremsverzögerung sei jetzt a_3. Sie ist noch nicht bekannt.

Bremsgleichungen: $s_3(t) = 12\frac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2}a_3 t^2$ (1)

$v_3(t) = 12\frac{m}{s} - a_3 \cdot t$ (2)

Bedingung für den Haltepunkt: $v_3(6\,s) = 0$:

d.h. $0 = 12\frac{m}{s} - a_3 \cdot 6\,s \;\Rightarrow\; a_3 \cdot 6\,s = 12\frac{m}{s} \;\Rightarrow\; \boxed{a_3 = 2\frac{m}{s^2}}$

Damit folgt aus (1): $s(6\,s) = 12\frac{m}{s} \cdot 6\,s - 1\frac{m}{s^2} \cdot 36\,s^2 = 36\,m$

(4) **Zusammensetzen der Wegstrecken:**

Gesamtwegstrecke: $s = 24\,m + 60\,m + 36\,m = 120\,m$

Zusatzaufgabe: Zeichne das v-t-Diagramm der ganzen Bewegung.

Die v-t-Gleichungen für die drei Teilbewegungen sind:

T1: $v_1(t) = 3\frac{m}{s^2} \cdot t$

T2: $v_2(t) = 12\frac{m}{s}$ (konstant)

T3: $v_3(t) = 12\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s^2} \cdot t$

Diese kann man in dieser Form nicht verwenden, denn für die Gesamtbewegung bleibt der t-Nullpunkt am Start der gesamten Bewegung. Man muss sie anpassen:

T1: $v(t) = 3\frac{m}{s^2} \cdot t$ für $0 \le t \le 4\,s$

T2: $v(t) = 12\frac{m}{s}$ für $4\,s \le t \le 9\,s$

T3: $v(t) = 12\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s^2} \cdot (t - 9\,s)$

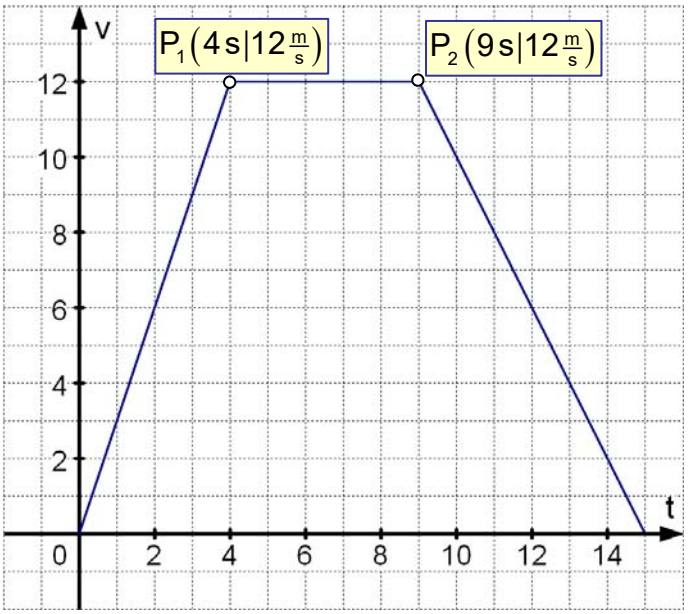
bzw. $v(t) = -2\frac{m}{s^2} \cdot t + 30\frac{m}{s}$ für $9\,s \le t \le 15\,s$

Hier muss man von der Zeitkoordinate die 9 Sekunden abziehen, die vor der Bremsbewegung liegen. In der mathematischen Funktionsschreibweise sollte man dies so darstellen:

$$v(t) = \begin{cases} 3\frac{m}{s^2} \cdot t & \text{für } 0 \le t \le 4\,s \\ 12\frac{m}{s} & \text{für } 4\,s \le t \le 9\,s \\ 12\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s^2} \cdot (t - 9\,s) & \text{für } 9\,s \le t \le 15\,s \end{cases}$$

Und nun das Diagramm.

Hinweis:
Um das Diagramm zu erstellen benötigt man hier nicht einmal die Geschwindigkeitsfunktion. Es genügt, die Zustandspunkte P_1 und P_2 einzuzeichnen. Die letzte Strecke führt dann bis zum Haltepunkt auf die t-Achse, den man durch die Angabe „Bremszeit = 6 s“ findet.



Der insgesamt zurückgelegte Weg ist nun die Fläche unter diesem Trapez:

Trapezformel: $A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$, d.h. hier:

$$s = \frac{1}{2}(15 + 5) \cdot 12 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 12 = 120\ (m)$$

Ist das nicht einfach?

(6) Zwei Schienenfahrzeuge fahren aufeinander zu.

Fahrzeug A hat die Geschwindigkeit $v_A = 30\frac{m}{s}$, Fahrzeug B $v_B = 40\frac{m}{s}$.

Die Fahrer erkennen diese Situation als sie noch 400 m voneinander entfernt sind.

Sie bremsen daraufhin mit den Verzögerungen $a_A = 3\frac{m}{s^2}$ und $a_B = 5\frac{m}{s^2}$ ab.

Überprüfe, ob sie einen Zusammenstoß vermeiden können, und wenn ja, in welchem Abstand voneinander sie zum Halten kommen.

Lösung:

Neu an dieser Situation ist, dass das Fahrzeug B auch noch eine Wegkoordinate für den Zeitpunkt $t = 0$ bekommen muss, in dem es zu bremsen beginnt.

Notieren wir die Bewegungsgleichungen.

Für A: $v_A(t) = 30\frac{m}{s} - 3\frac{m}{s^2}\cdot t$

$s_A(t) = 30\frac{m}{s}\cdot t - 1{,}5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$

Für B: $v_B(t) = -\left(40\frac{m}{s} - 5\frac{m}{s^2}\cdot t\right) = -40\frac{m}{s} + 5\frac{m}{s^2}\cdot t$

$s_B(t) = 400m - (40\frac{m}{s}\cdot t - 2{,}5\frac{m}{s^2}\cdot t^2) = 400m - 40\frac{m}{s}\cdot t + 2{,}5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$

Erklärung: Fahrzeug B befindet sich zur Zeit $t = 0$ an der Wegmarke 400 und fährt dann auf A zu. Die Weg-Koordinate wird dann um die zurückgelegte Fahrstrecke verkürzt, weshalb man sie davon abziehen muss. Analog dazu erhält die Geschwindigkeit ein Minuszeichen, weil die Fahrt „nach links“ geht.

Berechnen wir nun die **Bremswege**. Dazu verwenden wir wieder die umgekehrte Bewegung, also die gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus dem Haltepunkt heraus zurück mit der Formel

$$v = \sqrt{2as} \Rightarrow s^* = \frac{v^2}{2a}.$$

Dann erhalten wir für das Fahrzeug A: $s_A{}^* = \dfrac{900\frac{m^2}{s^2}}{6\frac{m}{s^2}} = 150m$

und für B: $s_A{}^* = \dfrac{1600\frac{m^2}{s^2}}{10\frac{m}{s^2}} = 160m$

Das heißt, der Haltepunkt von B befindet sich an der Wegmarke $s_B = 400m - 160m = 240m$, während A bei 150 m hält.

Die Fahrzeuge haben also noch 90 m Abstand, wenn sie zum Stillstand gekommen sind.

Zusatzfrage 1: Wie lange müssen beide Fahrzeuge bremsen?

Hierzu verwenden wir die Bedingung für den Haltepunkt, und die lautet $v(t_H) = 0$.

Das ergibt für A wegen $v_A(t) = 30\frac{m}{s} - 3\frac{m}{s^2}\cdot t$ die Bremsdauer $0 = 30\frac{m}{s} - 3\frac{m}{s^2}\cdot t \Rightarrow t_A = 10\,s$.

und für B: $0 = -40\frac{m}{s} + 5\frac{m}{s^2}\cdot t \Rightarrow t_B = 8\,s$.

Zusatzfrage 2: Wo befinden sich die Fahrzeuge 5 s nach Beginn des Bremsvorgangs?

Fahrzeug A: $s_A(t) = 30\frac{m}{s}\cdot t - 1{,}5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$

$$s_A(5\,s) = 30\frac{m}{s}\cdot 5\,s - 1{,}5\frac{m}{s^2}\cdot 25\,s^2 = 150\,m - 37{,}5\,m = 112{,}5\,m$$

Fahrzeug B: $s_B(t) = 400\,m - 40\frac{m}{s}\cdot t + 2{,}5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$

$$s_B(5\,s) = 400\,m - 40\frac{m}{s}\cdot 5\,s + 2{,}5\frac{m}{s^2}\cdot 25\,s^2 = 400\,m - 200\,m + 62{,}5\,m = 262{,}5\,m$$

Dies sind die Wegkoordinaten der beiden Fahrzeuge: A ist bei 112,5 m und B bei 262,5 m.
Sie sind also noch genau 150 m voneinander entfernt.

Zusatzfrage 3

Wir lassen nun beide Fahrzeuge mit $a = 3\frac{m}{s^2}$ abbremsen. Es sei verraten, dass es nun einen Zusammenstoß gibt. Wir wollen berechnen, wo und wann der stattfindet und welche Geschwindigkeiten dann beide Fahrzeuge noch haben. Die Lösung ist einfach, wenn man sich darüber im Klaren ist, dass in der Weg-Gleichung Koordinaten stehen. Wenn es zum Zusammenstoß kommt, dann an derselben Wegmarke. Wir berechnen diesen „Schnittpunkt“ durch Gleichsetzen. Dabei wurde allerdings dem Fahrzeug B die neue Bremsverzögerung mitgegeben:

$$400\,m - 40\frac{m}{s}\cdot t + 1{,}5\frac{m}{s^2}\cdot t^2 = 30\frac{m}{s}\cdot t - 1{,}5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$$

$$400\,m - 70\frac{m}{s}\cdot t + 3\frac{m}{s^2}\cdot t^2 = 0 \quad \Big|:\frac{m}{s^2}$$

$$3t^2 - 70\,s + 400\,s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{70\,s \pm \sqrt{4900\,s^2 - 4800\,s^2}}{6} = \frac{70\,s \pm \sqrt{100\,s^2}}{6} = \frac{70 \pm 10}{6}\,s = \begin{cases} 13{,}3\,s \\ 10\,s \end{cases}$$

Der kleinere Zeitpunkt ist der richtige. Der größere ist physikalisch nicht sinnvoll.
Wo findet der Zusammenstoß statt?

Fahrzeug A: $s_A(10\,s) = 30\frac{m}{s}\cdot 10\,s - 1{,}5\frac{m}{s^2}\cdot 100\,s^2 = 300\,m - 150\,m = 150\,m$

Fahrzeug B: $s_B(10) = 400\,m - 40\frac{m}{s}\cdot 10\,s + 1{,}5\frac{m}{s^2}\cdot 100\,s^2 = 400\,m - 400\,m + 150\,m$

Natürlich befinden sich A und B beiden an derselben Stelle, d.h. bei der Wegmarke 150 m.
Und nun die Geschwindigkeiten:

$v_A(10\,s) = 30\frac{m}{s} - 3\frac{m}{s^2}\cdot 10\,s = 0\frac{m}{s}$ und $v_B(10s) = -40\frac{m}{s} + 3\frac{m}{s^2}\cdot 10\,s = -10\frac{m}{s}$

Wir sehen also: Im Augenblick des Zusammenstoßes ist A gerade zum Halten gekommen, während B mit der Geschwindigkeit $10\frac{m}{s}$ auf A aufprallt.